На правах рукописи

Хорькова Тамара Анатольевна

КОГОМОЛОГИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ β-РАВНОМЕРНЫХ АЛГЕБР

01.01.01 — математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань — 2009

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика"
Казанского государственного энергетического университета

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Григорян Сурен Аршакович
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Муштари Данияр Хамидович кандидат физико–математических наук, доцент Гичев Виктор Матвеевич
Ведущая организация:	Брянский государственный университет

Защита состоится 29 октября 2009 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г.Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд.324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 23 сентября 2009г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф-м.н., доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию свойств β-равномерных алгебр — алгебр непрерывных функций на локально компактных множествах со специальной топологией (β-топология). Такие алгебры являются естественным обобщением классических равномерных алгебр, т. е. алгебр непрерывных функций на компактных множествах, наделенных равномерной нормой.

Теория равномерных алгебр хорошо отражена в книге Т. Гамелина "Равномерные алгебры".

Первой публикацией, посвященной β-равномерным алгебрам можно, по-видимому, считать работу R. C. Buck, "Bounded continuous functions on a locally compact space опубликованную в Мичиганском математическом журнале. Работы последующих исследователей β-равномерных алгебр посвящались, с одной стороны, распространению результатов из теории равномерных алгебр на β-равномерный случай, а с другой стороны, выяснению свойств этих алгебр, у которых нет аналогов для равномерных алгебр.

В предложенной диссертации рассматриваются тоже два типа задач: распространяются известные утверждения из теории равномерных алгебр на β-равномерный случай, и доказываются утверждения, которые справедливы только для β-равномерных алгебр.

Интерес к изучению β-равномерных алгебр связан с возможностью приложения их к вопросам C^*-алгебр, теории динамических систем, теории функций многих комплексных переменных, теории локально выпуклых алгебр на локально компактных группах.

Цель работы. Исследование β-равномерных алгебр, гомологических свойств таких алгебр, распространение теории обобщенных по

Аренсу – Зингеру аналитических функций на алгебры функций, заданных на локально компактных абелевых группах.

Общая методика исследования. В работе широко применяются методы функционального анализа и теории функций, теории мер, гармонического анализа на локально компактных группах, теории гомологий локально выпуклых пространств.

Научная новизна. В работе исследованы граница Шилова и другие математические обьекты β-равномерных алгебр, дается критерий аменабельности таких алгебр, в терминах спектрального синтеза найдено условие совпадения двух классов инвариантных алгебр на локально компактных абелевых группах. Получен критерий максимальности инвариантных β-равномерных алгебр на локально компактных абелевых группах.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер и является продолжением исследований локально выпуклых алгебр, гармонического анализа на группах. Полученные результаты могут быть использованы и в других областях математики.

Апробация работы. Основные результаты были доложены на:

- первой молодежной научной конференции «Тинчуринские чтения», Казань, 2006 г., третьей конференции 2008 г., четвертой конференции 2009 г.

- научном семинаре кафедры математического анализа механико–математического факультета Казанского государственного университета в 2007 г. (руководитель – д.ф-м.н., профессор А. Н. Шерстнев);

- Воронежской зимней математической школе – конференции С. Г. Крейна – 2008 г.

- научном семинаре Института математики НАН Армении по банаховым алгебрам и комплексному анализу, Ереван, 2008 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 работы, которые отражают ее основные результаты. Список публикаций приведен в конце автореферата. В совместных работах [3], [4] М. И. Караханяну принадлежит постановка задачи. В работе [1] С. А. Григоряну принадлежит постановка задачи и общие рекомендации по решению.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа набрана в системе LaTeX и содержит 77 страниц. В списке литературы 37 наименований.

На защиту выносятся следующие результаты.

- Исследованы β-равномерные максимальные алгебры и β-равномерные алгебры Дирихле.

- Введено понятие когомологии β-равномерной алгебры и доказано, что из тривиальности первой группы когомологий (β-аменабельности) следует совпадение β-аменабельной алгебры с алгеброй всех непрерывных ограниченных функций на локально компактном пространстве.

- В терминах спектрального синтеза найден критерий совпадения двух классов инвариантных β-равномерных алгебр на локально компактных абелевых группах.

- Установлен критерий максимальности инвариантных β-равномерных алгебр на локально компактных абелевых группах.

Основное содержание работы

Первая глава, состоящая из семи параграфов, посвящена описанию свойств β-равномерных алгебр. В ней, наряду с известными результатами, есть новые утверждения. Первые три параграфа посвящены различным определениям, используемым в этой работе.

Пусть $C(\Omega)$ – банахова алгебра всех непрерывных комплексно-значных функций на компактном множестве Ω, наделенная равномерной нормой. Замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $C(\Omega)$ называется *равномерной*, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω, т.е. для любых x_1, x_2 из Ω, $x_1 \neq x_2$, существует функция f из $\mathcal{A}$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Замкнутое подмножество F в Ω называется *границей* для алгебры $\mathcal{A}$, если $\sup_\Omega |f| = \sup_F |f|$, для всех f из $\mathcal{A}$. Пересечение всех границ для алгебры $\mathcal{A}$ есть *граница Шилова*, т.е. такое наименьшее (по включению) замкнутое множество F, что $\sup_F |f| = \sup_\Omega |f|$, для всех f из $\mathcal{A}$. В дальнейшем через $\partial\mathcal{A}$ будем обозначать границу Шилова алгебры $\mathcal{A}$. Каждая равномерная алгебра обладает границей Шилова и она единственна.

Замкнутое множество F в Ω называется *множеством пика* для равномерной алгебры $\mathcal{A}$, если существует такая функция f в $\mathcal{A}$, что $f(x) = 1$, для всех x из F, и $|f(x)| < 1$, если x из $\Omega \setminus F$. Замкнутое множество Ω называется *p-множеством* или обобщенным множеством пика для алгебры $\mathcal{A}$, если оно является пересечением множеств пика. Отметим, что p-множество является множеством пика тогда и только тогда, когда оно является множеством типа G_δ.

Пусть Ω — локально компактное множество. Множество Ω называется σ-компактным, если $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где каждое F_n – компактное множество. *Везде в этой работе под локально компактным множеством будем подразумевать σ-компактное множество.*

Пространство $C_b(\Omega)$ всех непрерывных, ограниченных комплекснозначных функций на локально компактном пространстве Ω является банаховой алгеброй относительно равномерной нормы $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f(x)|$ и поточечного произведения. Пусть $C_0(\Omega)$ — подалгебра всех функций из $C_b(\Omega)$, обращающихся в нуль в бесконечности.

Множество $\mathcal{X}$ всех мультипликативных линейных функционалов на $C_b(\Omega)$ образует компактное в *-слабой топологии подмножество единичного шара пространства $C_b(\Omega)^*$, сопряженного к $C_b(\Omega)$. С помощью $x \in \Omega$ можно определить мультипликативный функционал $\delta_x : C_b(\Omega) \to \mathbb{C}$, полагая $\delta_x(f) = f(x)$, для всех $f \in C_b(\Omega)$. Поэтому, можно считать, что Ω есть локально компактное подмножество множества $\mathcal{X}$.

Преобразованием Гельфанда функции f из $C_b(\Omega)$ называется функция $\hat{f}$ на $\mathcal{X}$, $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. Очевидно, что $\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$, т.е. это преобразование сохраняет мультипликативность. Преобразование Гельфанда порождает гомоморфизм между алгебрами $C_b(\Omega)$ и $C(\mathcal{X})$. Если алгебру $C(\mathcal{X})$ наделить равномерной нормой, то этот гомоморфизм станет изометрическим изоморфизмом между алгебрами $C_b(\Omega)$ и $C(\mathcal{X})$. Отождествляя x и δ_x, можем полагать, что $C_b(\Omega)$ есть сужение алгебры $C(\mathcal{X})$ на множество Ω в $\mathcal{X}$ и изометрический изоморфизм порождается оператором сужения $\hat{f} \to \hat{f}|_\Omega$. Отсюда нетрудно увидеть, что Ω всюду плотно в $\mathcal{X}$. Множество $\mathcal{X}$ называется *компактификацией Стоуна – Чеха* локально компактного пространства Ω.

С помощью функций из $C_0(\Omega)$ определим семейство полунорм $\{P_g\}_{g\in C_0(\Omega)}$, полагая $P_g(f) = \|fg\|_\infty$. Определенная таким образом топология называется *β-топологией* на $C_b(\Omega)$. Банахову алгебру $C_b(\Omega)$, наделенную β-топологией, будем обозначать $C_\beta(\Omega)$. Отметим, что β-топология является *локально выпуклой топологией*, порожденной семейством полунорм $\{P_g\}_{g\in C_0(\Omega)}$.

Пусть $M(\Omega)$ — пространство всех конечных регулярных борелевских мер на Ω. Это пространство совпадает с пространством $C_\beta(\Omega)^*$, сопряженным к $C_\beta(\Omega)$. В четвертом параграфе дается определение β-равномерной алгебры.

Замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $C_\beta(\Omega)$ называется *β-равномерной*, если она содержит константы и разделяет точки множества Ω (т. е. для любых $x_1,\ x_2 \in \Omega,\ x_1 \neq x_2$, существует функция $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x_1) \neq f(x_2)$). Равномерная топология сильнее β-топологии, поэтому β-равномерная алгебра является замкнутой подалгеброй алгебры $C_b(\Omega)$ и в равномерной норме.

Алгебру $\mathcal{A}$, наделенную равномерной топологией, будем обозначать через $\mathcal{A}_\infty$. Пусть $M(\mathcal{A}_\infty)$ — пространство всех линейных мультипликативных функционалов алгебры $\mathcal{A}_\infty$. Обозначим через $M(\mathcal{A})$ множество всех β-непрерывных линейных мультипликативных функционалов β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, $M(\mathcal{A})$ есть подмножество в $M(\mathcal{A}_\infty)$.

Пусть $\partial\mathcal{A}_\infty$ будет обозначать границу Шилова алгебры $\mathcal{A}_\infty$. Множество $\partial\mathcal{A}_\infty \cap \Omega$ будем называть *β-границей Шилова* алгебры $\mathcal{A}$ и обозначать $\partial\mathcal{A}$, это множество, вообще говоря, может быть и пустым.

Предложение 1.4.1. *Пусть* $\partial\mathcal{A}_\infty = \partial\mathcal{A}$. *Тогда* $M(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A}_\infty)$.

В пятом параграфе первой главы в терминах ортогональных мер дается описание p-множества β-равномерных алгебр.

Пусть μ_E — мера, полученная сужением меры μ из $M(\Omega)$ на множество E. Пусть $A^\perp$ пространство мер из $M(G)$, ортогональных к алгебре A. Вообще говоря, если мера μ из $\mathcal{A}^\perp$, а E — произвольное замкнутое множество в Ω, то мера μ_E не обязана принадлежать пространству $\mathcal{A}^\perp$.

Теорема 1.5.1. *Пусть* E *— замкнутое подмножество локально компактного пространства* Ω, *и* E *является p-множеством для* β*-равномерной алгебры* $\mathcal{A}$ *на* Ω. *Тогда, для любой меры* μ *из* $\mathcal{A}^\perp$, *мера* μ_E *также принадлежит* $\mathcal{A}^\perp$.

В следующем параграфе вводятся и исследуются β-равномерные алгебры Дирихле и β-равномерные максимальные алгебры.

Для комплекснозначной функции f на Ω через $\mathrm{Re}(f)$ будем обозначать её вещественную часть ($f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$). Пространство $C_\beta(\Omega)$ можно представить в виде $C_\beta(\Omega) = C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} + iC_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$, где $C_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$ — пространство всех действительных ограниченных непрерывных функций на локально компактном пространстве Ω, наделенное β-топологией. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ — *алгебра Дирихле*, если пространство $\mathrm{Re}(\mathcal{A}) = \{\mathrm{Re}(f) \in C_\beta(\Omega)_\mathbb{R} : \ f \in \mathcal{A}\}$ плотно в $C_\beta(\Omega)_\mathbb{R}$. Аналогично можно определить максимальную β-равномерную алгебру. β-равномерная алгебра $\mathcal{A}$ на локально компактном пространстве Ω называется *максимальной*, если $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$ и не существует β-равномерной алгебры, заключенной строго между $\mathcal{A}$ и $C_\beta(\Omega)$.

Пусть F — замкнутое подмножество в Ω и $Y = \Omega \setminus F$. Обозначим через $\mathcal{A}_Y$ (соответственно $\mathcal{A}_F$) замыкание в $C_\beta(Y)$ (соотв. $C_\beta(F)$) сужения β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$ на Y (соотв. F). Очевидно, $\mathcal{A}_Y$

и $\mathcal{A}_F$ — β-равномерные алгебры соответственно на Y и F.

Теорема 1.6.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — β-равномерная алгебра Дирихле, $\mathcal{A} \neq C_\beta(\Omega)$, на локально компактном пространстве Ω, и F — p-множество для $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_F$ являются алгебрами Дирихле соответственно на Y и F, если при этом $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$, то $\mathcal{A}_Y$ есть собственная подалгебра алгебры $C_\beta(Y)$.*

Максимальные алгебры обладают несколько иным свойством.

Теорема 1.6.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная β-равномерная алгебра на локально компактном пространстве Ω, F – p-множество. Тогда либо $\mathcal{A}_Y$ – максимальная β-равномерная алгебра на Y, а $\mathcal{A}_F = C_\beta(F)$ ($Y = \Omega \setminus F$), либо $\mathcal{A}_F$ – максимальная β-равномерная алгебра на F, а $\mathcal{A}_Y = C_\beta(Y)$.*

Пусть Δ — компактное множество, $\mathcal{A}$ — равномерная алгебра на Δ и E — множество пика для алгебры $\mathcal{A}$. Множество E называется *интерполяционным множеством пика*, если сужение $\mathcal{A}|_E$ алгебры $\mathcal{A}$ на E совпадает с алгеброй всех непрерывных функций на E ($\mathcal{A}|_E = C(E)$). Пусть E — интерполяционное множество пика, $\Omega = \Delta \setminus E$ и $\mathcal{A}_0$ — замыкание сужения $\mathcal{A}|_\Omega$ в $C_\beta(\Omega)$.

Теорема 1.6.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная равномерная алгебра на Δ. Тогда $\mathcal{A}_0$ — β-равномерная максимальная алгебра на Ω. Если $\mathcal{A}$ — равномерная алгебра Дирихле, то $\mathcal{A}_0$ — β-равномерная алгебра Дирихле.*

В последнем седьмом параграфе первой главы исследуются максимальные множества антисимметрии β-равномерных алгебр.

Замкнутое подмножество F множества Ω называется *множеством антисимметрии* для β-равномерной алгебры $\mathcal{A}$, если алгебра $\mathcal{A}|_F$ не содержит вещественных функций отличных от постоянной.

Вторая глава посвящена вопросам аменабельности β-равномерных алгебр.

Пусть X — банахово пространство, являющееся одновременно банаховым $\mathcal{A}_\infty$-бимодулем. Будем говорить, что X есть β-полный $\mathcal{A}_\infty$-бимодуль, если из того, что сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathcal{A}$ сходится к f_0 в β-топологии следует, что для любого x из X сети $\{f_i x\}_{i\in I}$ и $\{x f_i\}_{i\in I}$ сходятся к элементам $f_0 x$ и $x f_0$ соответственно, в норме банахова пространства X. Бимодульная операция на банаховом пространстве X задает бимодульную операцию на сопряженном пространстве X^* к X: $(f\varphi)(x) = \varphi(xf)$, $(\varphi f)(x) = \varphi(fx)$, для всех $f \in \mathcal{A}$, $x \in X$, $\varphi \in X^*$.

Линейный функционал φ из X^* назовем **-слабо β-непрерывным*, если из того, что $\{f_i\}_{i\in I}$ β-сходится в $\mathcal{A}$ к f_0 следует, что сети функционалов $\{f_i\varphi\}_{i\in I}$ и $\{\varphi f_i\}_{i\in I}$ в слабой топологии сходятся к $f_0\varphi$ и φf_0 соответственно.

Непрерывное отображение $D : \mathcal{A}_\infty \to X$ называется X- *дифференцированием*, если $D(fg) = fD(g) + D(f)g$, для любых f, g из $\mathcal{A}_\infty$. Отображение $\delta_x : \mathcal{A}_\infty \to X$, задаваемое формулой $\delta_x(f) = [f, x] = fx - xf$, $x \in X$, называется *внутренним* дифференцированием. Обозначим через $Z^1(\mathcal{A}, X)$ пространство всех непрерывных X-дифференцирований и через $B^1(\mathcal{A}, X)$ — пространство всех внутренних дифференцирований. Фактор-группа

$$H^1(\mathcal{A}, X) = Z^1(\mathcal{A}, X)/B^1(\mathcal{A}, X)$$

называется *первой группой когомологий алгебры* $\mathcal{A}_\infty$ с коэффициентами в $\mathcal{A}_\infty$-бимодуле X. Связь когомологий топологических алгебр со свойствами этих алгебр можно найти в книгах А. Я. Хелемского "Банаховы и полинормированные алгебры" и "Гомология в банаховых и топологических алгебрах".

Дифференцирование $D : \mathcal{A}_\infty \to X$ называется *β-непрерывным*, если из того, что сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathcal{A}$ сходится в β-топологии к f_0, следует, что сеть $\{D(f_i)\}_{i\in I}$ сходится в норме пространства X к $D(f_0)$. Пусть X есть β-полный $\mathcal{A}_\infty$-бимодуль. Тогда для любого x внутреннее дифференцирование δ_x является β-непрерывным. Обозначим через $Z^1_\beta(\mathcal{A}, X)$ — пространство всех β-непрерывных дифференцирований. Ясно, что каждое β-непрерывное дифференцирование $D : \mathcal{A}_\infty \to X$ является непрерывным дифференцированием из $\mathcal{A}_\infty$ в X, и $Z^1_\beta(\mathcal{A}, X)$ есть абелева подгруппа группы $Z^1(\mathcal{A}, X)$. Поэтому для β-полного $\mathcal{A}_\infty$-бимодуля X справедливо вложение $H^1_\beta(\mathcal{A}, X) \subset H^1(\mathcal{A}, X)$.

Аналогично можно определить $Z^1_\beta(\mathcal{A}, X^*)$ — абелеву группу всех β-непрерывных в *-слабой топологии дифференцирований $D : \mathcal{A} \to X^*$, т. е. если сеть $\{f_i\}_{i\in I}$ в $\mathcal{A}$ β-сходится к f_0, то сеть линейных функционалов $\{D(f_i)\}_{i\in I}$ в *-слабой топологии в X^* сходится к $D(f_0)$, и $Z^1(\mathcal{A}, X^*)$ — абелеву группу всех непрерывных в *-слабой топологии дифференцирований $D : \mathcal{A}_\infty \to X^*$. Очевидно, что $Z^1_\beta(\mathcal{A}, X^*)$ есть подгруппа группы $Z^1(\mathcal{A}, X^*)$.

Согласно Б. Джонсону, банахова алгебра $\mathcal{A}_\infty$ называется *аменабельной*, если группа $H^1(\mathcal{A}, X^*) = Z^1(\mathcal{A}, X^*)/B^1(\mathcal{A}, X^*)$ — тривиальна, для любого $\mathcal{A}_\infty$-бимодуля X, где $B^1(\mathcal{A}, X^*)$ — абелева группа, состоящая из внутренних дифференцирований $\delta_\varphi(a) = a\varphi - \varphi a$.

Назовем алгебру $\mathcal{A}$ *β-аменабельной*, если группа $H^1_\beta(\mathcal{A}, X^*) = Z^1_\beta(\mathcal{A}, X^*)/B^1(\mathcal{A}, X^*)$ — тривиальна, для любого β-полного $\mathcal{A}_\infty$-бимодуля X. Очевидно, что если $\mathcal{A}$ — аменабельная алгебра, то $\mathcal{A}$ — β-аменабельна, т. е. из условия $H^1(\mathcal{A}, X^*) = 0$, для любого $\mathcal{A}_\infty$-бимодуля X, следует, что $H^1_\beta(\mathcal{A}, X^*) = 0$, для любого β-полного $\mathcal{A}_\infty$-бимодуля X.

В третьем параграфе приведен основной результат второй главы.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ есть β-равномерная алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) $\mathcal{A} = C_\beta(\Omega)$,
(b) $\mathcal{A}$ *— β-аменабельная алгебра.*

Данное утверждение есть аналог теоремы М. Шейнберга для равномерных алгебр.

Последняя глава диссертационной работы посвящена исследованию β-равномерных алгебр на локально компактных абелевых группах, инвариантных относительно сдвигов. Первый и второй параграфы этой главы носят вводный характер.

Пусть G — связная локально компактная абелева группа и $\widehat{G}$ — группа её характеров. Пусть $L^1(G, d\sigma)$ – банахово пространство всех интегрируемых и измеримых функций на локально компактной группе G с нормой $\|f\|_1 = \int_G |f| d\sigma$, $f \in L^1(G, d\sigma)$.

Преобразованием Фурье функции f из $L^1(G, d\sigma)$ называется функция $\widehat{f}$ на $\widehat{G}$, такая что $\widehat{f}(\chi) = \int_G f \cdot \overline{\chi} d\sigma$.

В третьем параграфе третьей главы исследуется ряд свойств β-равномерных алгебр инвариантных относительно сдвигов на локально компактной абелевой группе G.

Пусть S — некоторая подполугруппа группы характеров $\widehat{G}$, содержащая единичный элемент и разделяющая точки группы G. Обозначим через $P(S)$ алгебру обобщенных полиномов, порожденных полугруппой S, т. е. функций вида $q = \sum_{n=1}^{n_q} c_n \chi_n$, где χ_n — характеры из полугруппы S и c_n из $\mathbb{C}$. Пусть A_S — пополнение $P(S)$ в β-топологии.

Лемма 3.3.1. *Полугруппа $A_S \cap \widehat{G}$ совпадает с замыканием полугруппы S в локально компактной абелевой группе характеров $\widehat{G}$.*

Пусть L инвариантное относительно сдвигов замкнутое в *-слабой топологии подпространство пространства $L^\infty(G, d\sigma)$. *Спек-*

тром $Sp(L)$ пространства L называется множество характеров $L \cap \widehat{G}$. Обозначим через $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ семейство всех открытых в $\widehat{G}$ окрестностей полугруппы S. Каждое множество S_i порождает идеал

$$I_{S_i} = \{f \in L^1(G, d\sigma) : \ \widehat{f}(\chi) = 0, \ \forall \chi \in S\}.$$

Очевидно, $\cup_\Lambda I_{S_i}$ — идеал банаховой алгебры $L^1(G, d\sigma)$. Пусть J_S есть замыкание этого идеала в $L^1(G, d\sigma)$. Этот идеал является *минимальным* среди всех идеалов, ядро которых совпадает с полугруппой S. *Максимальным* среди таких идеалов есть идеал $I_S = \{f \in L^1(G, d\sigma) : \ \widehat{f}(\chi) = 0, \ \forall \chi \in S\}$. Будем говорить, что полугруппа S является *полугруппой спектрального синтеза*, если $J_S = I_S$.

Основным результатом четвертого параграфа является

Теорема 3.4.1. *Пусть A — максимальная инвариантная относительно сдвигов β-равномерная алгебра на локально компактной абелевой группе G, спектр которой есть полугруппа S. Следующие условия эквивалентны:*
a) $A = A_S$;
b) S — полугруппа спектрального синтеза.

В следующих трех параграфах исследуются различные свойства β-инвариантных алгебр на локально компактных абелевых группах. Приведем основные результаты этих трех параграфов.

Теорема 3.5.1. *Пусть A — инвариантная относительно сдвигов β-равномерная алгебра на локально компактной группе G. Тогда группа G является границей Шилова для β-равномерной алгебры A и каждая точка из G является p-точкой для алгебры A.*

Теорема 3.6.1. *Пусть A — инвариантная относительно сдвигов β-равномерная алгебра на локально компактной группе G, и пусть Γ — максимальная подгруппа в группе характеров $\widehat{G}$, содержащаяся в A. Тогда* *a)* Γ *— замкнутая подгруппа в группе* $\widehat{G}$*;*

b) каждое максимальное множество антисимметрии алгебры A *есть класс смежности группы* G *по подгруппе* $\Gamma^{\perp} = \{\alpha \in G : \chi(\alpha) = 1$ *для всех* χ *из* $\Gamma\}$.

Теорема 3.7.3. *Пусть* A *— инвариантная относительно сдвигов максимальная* β*-равномерная алгебра на локально компактной абелевой группе* G*. Тогда полугруппа* $A \cap \widehat{G}$ *задает полный архимедов порядок на группе* $\widehat{G}$*.*

В последних двух параграфах диссертационной работы исследуются точечные дифференцирования инвариантных β-равномерных алгебр и алгебр, порожденных полугруппами.

В заключение автор выражает искреннюю признательность научному руководителю С. А. Григоряну за постановку задач и рекомендации в процессе работы над диссертацией.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Grigorian S. A. Point derivations on semigroup algebras. / S. A. Grigorian, T. A. Khorkova // Izv. NAN Armenii. Math. – 2006. – V. 41. – №4. – P. 1-22.

[2] Хорькова Т. А. Об однородных β-равномерных алгебрах на локально компактных абелевых группах. / Т. А. Хорькова // Тез. докл. – Воронеж: ВорГУ. – 2008. – С. 145-146.

[3] Караханян М. И. Об одном характеристическом свойстве алгебры $C(\Omega)_{\beta}$. / М. И. Караханян, Т. А. Хорькова // Сиб. матем. журнал. – 2009. – Т. 50. – №1.– С. 96-106.

[4] Караханян М. И. Об одной характеристике алгебры $C_\beta(\Omega)$. / М. И. Караханян, Т. А. Хорькова // Функ. анализ и его прил. – 2009. – Т. 43. – №1. – С. 85-87.

Подписано в печать ??.??.????
Гарнитура Computer Modern. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.–печ.л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № ????